Mogelzettel: Verteilungen

Diskrete Zufallsvariable

Sei X eine Zufallsvariable mit möglichen Ergebnissen $\{x_i\}$, die mit den Wahrscheinlichkeiten $P(X = x_i) = P(x_i)$ auftreten.

P := Wahrscheinlichkeitsverteilung von X

Erwartungswert: $\boxed{E(X) =< X >= \sum_i x_i P(x_i)}$

f Funktion einer Zufallsvariablen: $\boxed{E(f) =< f >= \sum_i f(x_i) P(x_i)}$

Beachte: $< f + g >=< f > + < g >$

aber i.A. $< fg > \neq < f >< g >$

Bemerkung: Der Mittelwert ist der Erwartungswert unter der (naiven) Annahme, dass alle Werte der Zufallsvariablen gleich wahrscheinlich sind, dh. $P(x_i) = 1/n$.

Varianz: $\boxed{V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) =< X^2 > - < X >^2}$

Kontinuierliche Zufallsvariable

Wahrscheinlichkeit, dass $a \leq x \leq b$:

$$\boxed{P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x) dx},$$

wobei $f(x)$ **Wahrscheinlichkeitsdichte** mit

$$f(x) \geq 0 \qquad \text{und} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

ist.

Erwartungswert: $E(x) := \overline{x} =< x >= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$

Varianz: $V(x) := E((x - \overline{x})^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \overline{x})^2 f(x) dx$

Natürlich gilt : $V(x) = E(x^2) - (E(x))^2 \quad \text{und} \quad \sigma = \sqrt{V(x)}$

$f(x)$ ist Wahrscheinlichkeitsdichte
$f(x)\,dx$ ist eine Wahrscheinlichkeit

(kumulative) Wahrscheinlichkeitsverteilung:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$$

$$P(x \leq a) = F(a), \quad P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a)$$

Offenbar ist $$F(-\infty) = 0 \qquad F(\infty) = 1$$

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Erwartungswerte von Funktionen:

$$E(h) := <h> = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x)\,dx$$

Linearität: $< a \cdot g + b \cdot h > = a < g > + b < h >$

aber i.a. $< g \cdot h > \neq < g > \cdot < h >$

Binomialverteilung

Wie wahrscheinlich sind r Erfolge bei einer Versuchsreihe von n Würfen mit Erfolgswahrscheinlichkeit p?

$$\boxed{P(r; n, p) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}} = \frac{n!}{r!(n-r)!} p^r (1-p)^{n-r}$$

Summe der Binomial-Verteilung:

$$\sum_{r=0}^{n} P(r) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} = (p + (1-p))^n = 1$$

Erwartungswert: $\boxed{< r > = n \cdot p}$

Varianz: $\boxed{V(r) = n\,p\,(1-p)}$

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{n\,p\,(1-p)}$

In Matlab/Octave: P(k,n,p): binopdf(k,n,p)

Poissonverteilung:

unbekannte Versuchsanzahl, aber bekannter Erwartungswert λ

Wahrscheinlichkeit r Ereignisse zu beobachten, wenn im Mittel λ erwartet werden:

$$\boxed{P(r;\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^r}{r!}}$$

Normierung: $\displaystyle\sum_{r=0}^{\infty} P(r,\lambda) = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\lambda^r}{r!}}_{=e^{\lambda}} = 1$

Erwartungswert: $\boxed{<r>= \lambda}$

Varianz: $\boxed{V(r) = \lambda}$

Beachte: Summe zweier Poissonprozesse ist Poissonprozess mit $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$
In Matlab/Octave: $P(r,\lambda)$ = poisspdf(r,Lambda)

Gauß-Verteilung:

Dichte: $\displaystyle f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

Es gilt: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ und $\displaystyle P(x \le a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$

Erwartungswert: $\displaystyle E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \mu$

Varianz: $\displaystyle V(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx = \sigma^2$

$\mathrm{FWHM} = 2\,\sigma\sqrt{2\ln 2} = 2.35\sigma$

$P(|x-\mu| \le \sigma) \approx 0.683$ $P(|x-\mu| \le 2\sigma) \approx 0.955$ $P(|x-\mu| \le 3\sigma) \approx 0.997$

Normalverteilung: $\boxed{f(x;0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}}$

Ist x gaussverteilt mit $E(x) = \mu$ und $V(x) = \sigma^2$, dann ist $\frac{x-\mu}{\sigma}$ normalverteilt!
Matlab/Octave: $f(x,\mu,\sigma) = \mathrm{normpdf}(x,\mu,\sigma)$ und $P(x \le a) = \mathrm{normcdf}(a,\mu,\sigma)$