Binomialverteilung:

Münzwurf: möglichen Ergebnissen K oder Z
Wahrscheinlichkeiten $P(K) = p$ und $P(Z) = 1 - p$

Wie wahrscheinlich sind r Treffer bei einer Versuchsreihe von n Würfen?

$$\boxed{P(r; n, p) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}} = \frac{n!}{r!(n-r)!}\, p^r (1-p)^{n-r}$$

Summe der Binomial-Verteilung:

$$\sum_{r=0}^{n} P(r) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} = (p + (1-p))^n = 1$$

Erwartungswert: $\boxed{< r >= n \cdot p}$

$$\begin{aligned}
< r > &= \sum_{r=0}^{n} r \cdot p^r (1-p)^{n-r} \frac{n!}{r!(n-r)!} = \sum_{r=1}^{n} r p^r (1-p)^{n-r} \frac{n!}{r!(n-r)!} \\
&= np \sum_{r=1}^{n} p^{r-1} (1-p)^{n-r} \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} \\
&= np \sum_{s=0}^{n-1} p^{s} (1-p)^{n-s-1} \frac{(n-1)!}{s!(n-s-1)!} && r = s+1 \\
&= np \sum_{s=0}^{n'} p^{s} (1-p)^{n'-s} \frac{n'!}{s!(n'-s)!} && n' = n-1 \\
&= np \underbrace{(p + (1-p))^{n'}}_{=1} = np
\end{aligned}$$

Varianz der Binomialverteilung:

$$\boxed{V(r) = n\,p\,(1-p)}$$

Standardabweichung:

$$\boxed{\sigma = \sqrt{n\,p\,(1-p)}}$$

Zum Beweis verwendet man einen Trick:

$$V(r) = \langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2 = \langle r^2 - r \rangle + \langle r \rangle - \langle r \rangle^2$$
$$\langle r^2 - r \rangle = \langle r(r-1) \rangle = \cdots = n(n-1)p^2$$

wobei die ... für eine zum Erwartungswert analoge Rechnung stehen, so dass

$$V(r) = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p)$$